Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 9. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(9.1) Analyzujte hry Breaker-Maker, Avoider-Enforcer, Enforcer-Avoider a Client-Waiter a Waiter-Client na hracím plánu piškvorek 3^2. (Některé hry bude nutné analyzovat pomocí počítače.) *4 body*

(9.2) Uvažme inverzní silnou hru 4^D (tj. kdo obsadí celou vyhrávající linii, prohrál), kde D je tak velké, že neexistuje remíza. (Časem si ukážeme, že takové D nutně musí existovat.) Jak hra dopadne? A jak dopadne inverzní silná hra 5^D, kde D je opět tak velké, že neexistuje remíza? *2 body*

(9.3) Uvažme hru „12 v řadě" na nekonečné mřížce, tj. kdo první vytvořil 12 piškvorek v řadě (svislé, vodorovné, šikmé), vyhrál. Dokažte, že se jedná o remízovou hru (tedy ani jeden hráč nedokáže v konečném čase vyhrát). Hint: Magická tabulka 4×4. *4 body*

(9.4) Uvažujme hru „N v řadě" pro $N \geq 12$, tentokrát však tzv. $(3 : 1)$ nevyváženou variantu. To znamená, že ve svém tahu položí X tři své symboly, potom O jeden symbol, potom X opět tři, pak O jeden, atd. Dokažte, že tato hra je vyhraná pro začínajícího hráče. *2 body*

(9.5) Ukažte toto tvrzení: Nechť F je hypergraf, ve kterém neexistuje remízová pozice (neexistuje 2-obarvení vrcholů hypergrafu takové, že by každá hrana obsahovala obě barvy), a nechť H je hypergraf, který obsahuje dvě disjunktní kopie hypergrafu F (tedy formálně, existují $F_1, F_2 \subseteq H$, kde $V(F_1) \cap V(F_2) = \emptyset$ a $F_1 \simeq F_2 \simeq F$). Potom Maker má explicitní vyhrávající strategii ve slabé hře na H jako 1. i jako 2. hráč. *2 body*